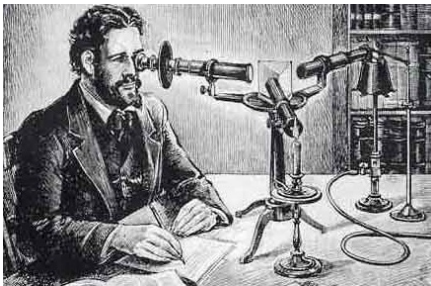


C^* -algebry

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 2 Elementy odwracalne i widmo



Def. Niech A będzie algebrą Banacha z jedyneką $1 \in A$. **Zbiór elementów odwracalnych** w A oznaczamy przez

$$\text{Inv}(A) := \{a \in A : \exists_{a^{-1} \in A} aa^{-1} = a^{-1}a = 1\}.$$

Uw. $\text{Inv}(A)$ tworzy grupę z mnożeniem. Dla $a, b \in \text{Inv}(A)$ mamy

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \quad (a^{-1})^{-1} = a.$$

Prz. Jeśli $A = B(X)$, gdzie X to przestrzeń Banacha, to

$$\text{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \rightarrow X \text{ bijekcja}\}.$$

Prz. Jeśli $A = C(M)$, gdzie M przestrzeń zwarta, to

$$\text{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : a(t) \neq 0 \text{ dla każdego } t \in M\}.$$

Prz. Jeśli $A = \ell^1(G)$, gdzie G grupa, to

$$G \subseteq \text{Inv}(\ell^1(G)) - \text{dużo większa grupa}$$

Def. Promieniem spektralnym elementu $a \in A$ nazywamy

$$r(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Uw. Powyższa granica istnieje na mocy Lematu Fekete  oraz

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|.$$

Lemat Neumanna

Niech A będzie algebrą Banacha z jedyneką. Dla każdego $a \in A$

$$r(a) < 1 \implies 1 - a \in \text{Inv}(A) \text{ oraz } (1 - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Dowód: Założenie $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ zastosowane do kryterium Cauchy'ego-Hadamarda oznacza, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\|$ jest zbieżny. Zatem $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ jest zbieżny (bezwzględnie). Ponadto

$$(1 - a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1} = 1.$$



Tw. Dla każdej algebry Banacha A

- ❶ zbiór $\text{Inv}(A)$ jest otwarty w A
- ❷ $\text{Inv}(A) \ni a \mapsto a^{-1} \in \text{Inv}(A)$ jest homeomorfizmem.
- ❸ powyższe odwzorowanie jest nieograniczone na brzegu $\text{Inv}(A)$:
jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \text{Inv}(A)$ zbiega do $a \notin \text{Inv}(A)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n^{-1}\| = \infty$

Dowód: Niech $a \in \text{Inv}(A)$. Dla dowolnego $h \in A$ mamy

$$a - h = a(1 - a^{-1}h)$$

Jeśli $\|h\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, to $\|a^{-1}h\| < 1$, więc $(1 - a^{-1}h) \in \text{Inv}(A)$ na mocy Lematu. Zatem dla małych h , $a - h \in \text{Inv}(A)$ oraz

$$(a - h)^{-1} = (1 - a^{-1}h)^{-1}a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}h)^n a^{-1},$$

czyli odwrotność jest funkcją analityczną od h . Stąd (1) i (2).

(3) Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{Inv}(A)$ zbiega do $a \in A$ oraz $\|a_n^{-1}\| \leq M$ dla nieskończenie wielu n . Wtedy znajdziemy n takie, że $\|a_n^{-1}\| \leq M$ oraz $\|a_n - a\| < \frac{1}{M}$. Stąd

$$\|1 - a_n^{-1}a\| = \|a_n^{-1}(a_n - a)\| < M \cdot \frac{1}{M} = 1$$

Zatem $a_n^{-1}a \in \text{Inv}(A)$ na mocy Lematu. Stąd $a \in \text{Inv}(A)$. ■

Wn. Jeśli $A \subseteq B$ są algebrami Banacha ze wspólną jedyneką, to zbiór $\text{Inv}(A)$ jest sumą (pewnych) składowych zbioru $\text{Inv}(B)$.

Dowód: Element odwracalny w A jest tym bardziej odwracalny w B . Zatem $\text{Inv}(A) \subseteq \text{Inv}(B)$. Z Twierdzenia wynika, że $\text{Inv}(B)$ nie zawiera punktów brzegowych $\text{Inv}(A)$ (bo tam “wybuchła norma”):

Jeśli $a \in \text{Inv}(B) \setminus \text{Inv}(A)$ byłby granicą ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{Inv}(A)$, to $\|a_n^{-1}\| \rightarrow \infty$ na mocy (3). Ale na mocy ciągłości odwrotności (2), $a_n^{-1} \rightarrow a^{-1} \in \text{Inv}(A)$. Zatem z ciągłości normy $\|a^{-1}\| = \infty$.



Ustalmy algebrę Banacha A z jedyneką 1 nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Def. Widmem (spektrum) elementu $a \in A$ nazywamy zbiór

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \text{Inv}(A)\}.$$

By podkreślić zależność od algebry A , będziemy też pisać $\sigma_A(a)$.

Prz. Widmo elementu algebry funkcji na przestrzeni zwartej M

Jeśli $A = C(M)$, to $\text{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : \forall_{t \in M} a(t) \neq 0\}$ i

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M} (a - \lambda 1)(t) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M} a(t) = \lambda\} \\ &= a(M).\end{aligned}$$

Zatem widmo funkcji $a \in C(M)$ jest obrazem tej funkcji.

Prz. Widmo operatora działającego na przestrzeni Banacha X

Skoro $\text{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \rightarrow X \text{ bijekcja}\}$ to **widmo operatora** $T \in B(X)$ wyraża się wzorem

$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{F} : T - \lambda 1 : X \rightarrow X \text{ odwzorowanie nieodwracalne}\}$

Czyli $\lambda \in \sigma(T) \iff$ zachodzi któryś z dwóch warunków:

- a) $T - \lambda 1$ **nie jest surjekcją.**
- b) $T - \lambda 1$ **nie jest injekcją** $\iff \ker(T - \lambda 1) \neq \{0\} \iff \exists_{x \in X \setminus \{0\}} Tx = \lambda x \iff \lambda$ jest wartością własną dla T .

Jeśli $\dim(X) = n < \infty$, to warunki (a) i (b) są równoważne, czyli

$$\sigma(T) = \{\text{wartości własne operatora } T\}.$$

Ponadto mamy wtedy izomorfizm algebr $B(X) \cong M_n(\mathbb{F})$ oraz $\text{Inv}(M_n(\mathbb{F})) = \{T \in M_n(\mathbb{F}) : \det(T) \neq 0\}$. Zatem dla $T \in M_n(\mathbb{F})$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \det(T - \lambda 1) = 0\}.$$

Twierdzenie (Podstawowe Własności Widma)

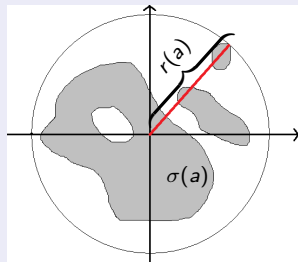
Widmo elementu $a \in A$ w zespolonej algebrze Banacha A z jedyneką jest zbiorem **niepustym i zwartym** oraz

$$\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \leq r(a)\},$$

gdzie

$$r(a) = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Promień spektralny $r(a)$, to najmniejszy promień koła o środku w zerze, w którym zawarte jest całe widmo $\sigma(a)$.



Uw. Niepustość widma wynika z Twierdzenia Louiville'a, które jest "równoważne" Zasadniczemu Twierdzeniu Algebry

Prz. Widmo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jest czysto urojone (byłoby puste w $\mathbb{R}$).

Zależność widma od nadalgebry

Jeśli $a \in A \subseteq B$ oraz $1 \in A \cap B$, to widmo $\sigma_A(a)$ powstaje z widma $\sigma_B(a)$ poprzez ewentualne “zalepienie dziur” w $\sigma_B(a)$.

Twierdzenie

Niech $A \subseteq B$ będzie inkluzją algebr Banacha ze wspólną jedynką. Niech $a \in A$ i niech $\{D_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną ograniczonych składowych dopełnienia $\sigma_B(a)$. Istnieje podzbiór $J \subseteq I$ taki, że

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(a) \cup \bigcup_{i \in J} D_i.$$

Dowód: Niech $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(a) = \bigsqcup_{i \in I} D_i \sqcup D_\infty$ będzie rozbiciem na składowe spójności (D_∞ składowa nieograniczona). Na mocy **Wn.** $\text{Inv}(A)$ jest sumą składowych zbioru $\text{Inv}(B)$. Zatem $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$ jest sumą składowych zbioru $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(a)$. Czyli dla pewnego $K \subseteq I$

$$\mathbb{C} \setminus \sigma_A(a) = \bigsqcup_{i \in K} D_i \sqcup D_\infty.$$

Stąd $\sigma_A(a) = \sigma_B(a) \cup \bigcup_{i \in J} D_i$ dla $J := I \setminus K$.

Def. Jeżeli A jest zespoloną algebrą bez jedynek, to **widmo** elementu $a \in A$ definiujemy jako

$$\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \text{Inv}(\tilde{A})\}.$$

gdzie $\tilde{A}$ jest jednowymiarowym ujedynkowieniem A .

Uw. Jeżeli A nie ma jedynek, to $0 \in \sigma_A(a)$ dla dowolnego $a \in A$.

Lem. (Kompleksyfikacja algebry rzeczywistej)

Niech A będzie algebrą nad $\mathbb{R}$. Zbiór $A_{\mathbb{C}} := \{(a, b) : a, b \in A\}$ tworzy algebrę nad $\mathbb{C}$ z działaniami danymi wzorami:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad (\text{dodawanie})$$

$$(\alpha + i\beta)(a, b) := (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a) \quad (\text{mnożenie przez liczbę})$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \quad (\text{mnożenie})$$

Ozn. Elementy $A_{\mathbb{C}}$ będziemy zapisywać $a + ib$. Wtedy $A \subseteq A_{\mathbb{C}}$.

Tw. (Dla Pani Juli)

Jeśli $(A, \|\cdot\|)$ jest rzeczywistą algebrą Banacha, to na $A_{\mathbb{C}} = A + iA$ istnieje norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ taka, że:

- 1 $(A_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ jest zespoloną algebrą Banacha,
- 2 $\|a\|_{\mathbb{C}} = \|a\|$ dla każdego $a \in A$,
- 3 $\|a + ib\|_{\mathbb{C}} = \|a - ib\|_{\mathbb{C}}$ dla wszystkich $a, b \in A$.

Ponadto wszystkie normy spełniające te warunki są równoważne.

Def. (Kaplansky) Jeżeli A jest rzeczywistą algebrą Banacha, to **widmo** elementu $a \in A$ definiujemy jako jego widmo w $A_{\mathbb{C}}$:

$$\sigma_A(a) := \sigma_{A_{\mathbb{C}}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \text{Inv}(A_{\mathbb{C}})\}.$$



Kaplansky

Wn. W dowolnej algebrze Banacha A (zespolonej lub nie, z jedyneką lub bez) widmo $\sigma_A(a)$ elementu $a \in A$ jest niepuste, zwarte oraz

$$r(a) = \max_{\lambda \in \sigma_A(a)} |\lambda|.$$